

Twierdzenie 1 przeformułowane tak, żeby coś sensownie mówiło. Zakłada się, że jest adresowane do czytelnika, który wie co to jest reprezentacja GNS. Jeśli nie wie - należy ją przedtem zdefiniować.

Założenia: Niech \mathcal{A} będzie C^* -algebrą z jednością, niech π będzie reprezentacją algebry \mathcal{A} na przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}(\mathcal{H})$, i niech ξ_0 będzie jakimś wektorem z \mathcal{H} o jednostkowej normie. Niech ω będzie stanem na algebrze \mathcal{A} zdefiniowanym przez:

$$\omega(a) = (\pi(a)\xi_0, \xi_0), \quad a \in \mathcal{A}, \quad (1)$$

i niech N_ω będzie lewostronnym ideałem algebry \mathcal{A} zdefiniowanym formułą

$$N_\omega = \{a \in \mathcal{A} : \omega(a^*a) = 0\}. \quad (2)$$

Niech $\{\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \xi_\omega\}$ będzie reprezentacją GNS wyznaczoną przez stan ω , na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_\omega = \overline{\mathcal{A}/N_\omega}$, z wektorem cyklicznym ξ_ω tak, że mamy

$$\pi_\omega(a)[b] = [ab], \quad (3)$$

gdzie $[a] = a + N_\omega$ oznacza element przestrzeni ilorazowej \mathcal{A}/N_ω .

Teza: Wtedy formuła

$$U\pi_\omega(a)\xi_\omega = \pi(a)\xi_0 \quad (4)$$

definiuje dobrze określony izometryczny izomorfizm z \mathcal{H}_ω na $\overline{\pi(\mathcal{A})\xi_0}$. W szczególności, jeśli wektor ξ_0 jest wektorem cyklicznym dla \mathcal{A} , to U jest izometrią z \mathcal{H}_ω na \mathcal{H} .

Dowód: Wynika wprost z założeń i z definicji.

Uwaga: Wyrażenie $\pi(a)(b)$ występujące w oryginale w ogóle nie zostało w pracy Hellera i Sasina zdefiniowane, nie wiadomo, co mogłoby oznaczać.