Algebra geometryczna i rachunek macierzowy

Przypomnnę macierze Pauliego. Są to macierze o dwóch wierszach i dwóch kolumnach

$$\sigma_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Wygodnie dodać także macierz jednostkową:

$$\sigma_0 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Razem mamy więc cztery macierze - każdą macierz zespoloną 2×2 można teraz przedstawić jako kombinację liniową, ze współczynnikami zespolonymi, naszych czterech maciarzy:

$$A = a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3,$$

gdzie a_0, a_1, a_2, a_3 są liczbami zespolonymi. Przypomnę, że w algebrze macierzy mamy operacje: transponowania (odwracania macierz względem głównej przekątnej), sprzężenia zespolonego (zamiany elementów macierzy na zespolenie sprzężone), oraz sprzężenia hermitowskiego (złożeniu jedna po drugiej dwóch poprzednich operacji). Macierz transponowaną do macierzy A oznaczam symbolem A^T, macierz sprzężoną zespolenie do macierzy A oznaczam symbolem $\bar{A}$, macierz hermitowsko sprzężoną do macierzy A oznaczam symbolem $A^\dagger$. Sprzężenie zespolone nie zmienia kolejności macierzy w iloczynie, natomiast transponowanie i sprzężenie hermitowskie kolejność odwraca:

$$\overline{(AB)} = \bar{A}\bar{B},\; (AB)^T = B^T A^T,\; (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger.$$

Jak się łatwo przekonać wszystkie cztery macierze σ są hermitowskie:

$$(\sigma_\mu)^\dagger = \sigma_\mu, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3).$$

Łatwo się przekonać, że macierze Pauliego spełniają proste relacje:

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3,\; \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1,\; \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2. \tag{3}$$

Mamy też

$$(\sigma_1)^2 = (\sigma_2)^2 = (\sigma_3)^2 = \sigma_0 \tag{4}$$

$$\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i, \quad (i = 1, 2, 3,\; i \neq j). \tag{5}$$

Są to dokładnie te same relacje mnożenia, które postulowalimy w algebrze Clifforda Cl(3,0) dla wektorów e_1, e_2, e_3. Stąd, a także z równości liczby wymiarów, wynika izomorfizm algebry Clifforda Cl(3,0) i algebry macierzy, jeżeli tylko przypiszemy

$$1 \mapsto \sigma_0, \quad e_i \mapsto \sigma_i. \tag{6}$$

Możemy teraz łatwo wyliczyć, w naszym przedstawieniu macierzowym,

$$I = e_1 e_2 e_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_3\sigma_3 = i\sigma_0. \tag{7}$$

Ponieważ σ_0 jest maciarzą jednostkową, możemy równie dobrze napisać

$$I = i. \tag{8}$$

Wtedy element

$$f = u + \mathbf{E} + I\mathbf{B} + Iv \tag{9}$$

algebry geometrycznej będzie miał postać macierzową:

$$f = (u + iv)\sigma_0 + (\mathbf{E} + i\mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\sigma}. \tag{10}$$

Możemy to przedtawić w postaci jawnej korzystając z formuł (1) i (2):

$$f = \begin{pmatrix} u + E_z + iv + iB_z & E_x + B_y - iE_y + iB_x \\ E_x - B_y + iE_y + iB_x & u - E_z + iv - iB_z. \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Tak zakodowaliśmy pole elektromagnetyczne, włącznie z niezidentyfikowanymi oobiektami latającymi u, v, w macierzy 2×2. A jak to odkodować? Prosto. Oznaczmy przez $\mathrm{tr}(A)$ ślad macierzy A - sumę jej elementów na głownej diagonali, zaś przez $\Im$ i $\Re$ część urojoną i rzeczywistą liczby zespolonej. Wtedy

$$\begin{aligned} u &= \Re(\mathrm{tr}(f\sigma_0))/2 \\ E_i &= \Re(\mathrm{tr}(f\sigma_i))/2 \\ B_i &= \Im(\mathrm{tr}(f\sigma_i))/2 \\ v &= \Im(\mathrm{tr}(f\sigma_0))/2. \end{aligned}$$

Pozostaje nam identyfikacja automorfizmów i anty–automorfizmów algebry Clifforda Cl(3,0). Musimy w tym celu wprowadzić macierz C zdefiniowaną jako:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Mamy $C^{-1} = -C$. Wtedy nietrudno sie przekonać, że nasze operacje $f', f^*, \tilde{f}$ tłumaczą się na następujące operacje na macierzach:

$$\begin{aligned} f' &= C\bar{f}C^{-1}, \\ f^* &= f^\dagger, \\ \tilde{f} &= Cf^TC^{-1}. \end{aligned}$$