Stany na algebrze

Definicja: Stanem f na algebrze nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi A tej algebry, liczby zespolonej, oznaczymy ją przez $f(A)$ w ten sposób, że spełnione są następujące warunki:

1. $f(A+B) = f(A) + f(B)$
2. $f(zA) = zf(A)$
3. $f(I) = 1$
4. Jeśli $A = A^*$ to $f(A)$ jest liczbą rzeczywistą
5. Jeśli A jest dodatnio określona, $f(A)$ jest liczbą nieujemną

Zauważmy najpierw, że aby znać stan, wystarczy go znać na wzystkich elementach hermitowskich naszej algebry. Istotnie, niech A będzie dowolne, niekoniecznie hermitowskie. Wtedy A_1 zdefiniowane przez $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ jest, jak sie łatwo przekonać, hermitowkie. Dowód?

$$A_1^* = \frac{1}{2}(A + A^*)^* = \frac{1}{2}(A^{**} + A^*) = \frac{1}{2}(A + A^*) = A_1.$$

Podobnie, choc o jotę trudniej, bo trzeba skorzystać z tego, że $\bar{i} = -i$, $A_2 = \frac{-i}{2}(A - A^*)$ jest hermitowkie (przećwicz). Z definicji mamy też natychmiast $A = A_1 + iA_2$. Zatem, z własności (1) oraz (2) mamy, że $f(A) = f(A_1) + if(A_2)$. Zaś A_1 i A_2 są hermitowskie. Zatem wystarczy znać stan na elementach hermitowskich, wtedy możemy znaleźć jego wartość na każdym innym elemencie algebry. Osiągnęliśmy więc pewien postęp. No więc idźmy za ciosem. Wiemy, z poprzedniego "wykładu", że: *Każda macierz hermitowska* 2×2, X, *da się jednoznacznie zapisać w postaci*

$$X = t\sigma_0 + x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3. \tag{1}$$

Korzystając z własności (1) i (2) stanu mamy, że

$$f(X) = tf(\sigma_0) + xf(\sigma_1) + yf(\sigma_2) + zf(\sigma_3). \tag{2}$$

Teraz, jak przystało na dobrego magika, wyciagnę królika z rękawa. Zalecę bowiem wykonanie kilku działań, których sens i cel będzie, poczatkowo, niezrozumiały. Wykorzysztamy tu tabliczkę mnożenia i własności macierzy σ z

poprzedniego wykładu.
Zauważmy najpierw, że wobec $\sigma_0 = I$ oraz własnośći (3) mamy $f(\sigma_0) = 1$. Żeby znać stan f wystarczy więc znać trzy liczby $f(\sigma_1), f(\sigma_2), f(\sigma_3)$. Nadajmy tym trzem liczbom nazwy: $\alpha = f(\sigma_1), \beta = f(\sigma_2), \gamma = f(\sigma_3)$. Ponieważ macierze Pauliego są hermitowskie, z własności (4) wynika, że α, β, γ są liczbamu rzeczywistym. Teraz równanie (2) możemy zapisać jako:

$$f(X) = t + \alpha x + \beta y + \gamma z. \tag{3}$$

Teraz wprowadzony na scene zostaje królik. Wprowadźmy macierz F zdefiniowaną jako:

$$F = \frac{1}{2}(I + \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3).\mathbf{??} \tag{4}$$

Twierdzenie: *Dla każdej macierzy A mamy*

$$f(A) = Tr(AF). \tag{5}$$

Dowód jest wręcz banalny. Idzie mniej więcej tak. Wystarczy pokazać, że tak jest dla każdej macierzy hermitowskiej. Wystraczy pokazać, że tak jest dla każdej z czterech macierzy σ. Prezprowadzę więc rozumowanie dla jednej tylko macierzy, powiedzmy σ_1. Podstawiamy więc za A macierz σ_1 i mamy pokazać, że $f(\sigma_1) = Tr(\sigma_1 F)$. Obliczmy prawą stronę. Mamy tam, pod śladem, iloczyn

$$\sigma_1 F = \frac{1}{2}\sigma_1(I + \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3).$$

Korzystamy z tabelki mnożenia macierzy σ z poprzedniego wykładu: $\sigma_1 I = \sigma_1, \sigma - 1\sigma_1 = I, \sigma_1\sigma_2 = \sigma_3, \sigma_1\sigma_3 = -\sigma_2$. Zatem

$$Tr(\sigma_1 F) = \frac{1}{2}(Tr(\sigma_1) + \alpha Tr(I) + \beta Tr(\sigma_3) - \gamma Tr(\sigma_2)).$$

Ale macierze $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ mają wszystkie ślad równy zero. Zaś $Tr(I) = 2$. Zostaje więc $Tr(\sigma_1 F) = \frac{1}{2}(2\alpha) = \alpha$. Ale α to przecież było $f(\sigma_1)$. Zatem $Tr(\sigma_1 F) = f(\sigma_1)$. Podobnie dla σ_2, σ_3. W sumie udowodniliśmy twierdzenie. Nie wykorzystaliśmy jeszcze własności (5) stanu f. By tą własnośc przekodować na własność macierzy F reprezentujacej stan f trzeba się troche napocić. Nie tak, jak w prawdziwej saunie, ale jednak. (N.B. E domu wypróbowaliśmy "saunę podzczerwoną". Wygląda to trochę jak śpiwór a trochę jak duża zapinana torba na lód. Człowiek się tam ładuje, włącza prąd, reguluje temperaturę i czas i ... zaczyna się pocić. Promieniowanie podczerwone ma ponoć mnóstwo leczniczych własności). Zauważmy najpierw, że biroąc ślad z obu stron równania (**??**) otrzymujemy $Tr(F) = 1$. Mamy:

Twierdzenie: Jeśli F jest macierzą hermitowską reprezentującą stan f, to F musi być macierzą dodatnio określoną, tzn. jej wartości własne muszą być liczbami nieujemnymi.

Dowód: Wiemy, że F jest macierzą hermitowską. Zatem da się zdiagonalizować. Istnieje więc macierz unitarna U taka, że $D = UFU^*$ jest macierzą diagonalną: $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2. \end{bmatrix}$. Liczby λ_1, λ_2 są wartościami własnymi macierzy F. Naszym celem jest pokazanie, wykorzystując własność (5), że są to liczby nieujemne. Znów wyciagnę królika z rękawa. Wprowadzę mianowicie macierz P zdefiniowana jako $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (Macierz tą zresztą już znamy, pojawiała się wielokrotnie, tyle, że nie oznaczaliśmy jej literka P.) Macierz ta jest diagonalna, jej wartości własne są widoczne jak na dłoni, to 1 i 0.. Macierz ta jest więc dodatnio okreslona. Mówiąc o macierzach dodatnio ukreslonych wspomniałem, że transformacja podobieństwa przez macierz unitarną nie zmienia własności macierzy. Prześliznęliśmy się wtedy po tym temacie. Przyjmijmy jednak, że tak w istocie jest. Jeśli tak, to macierz $\tilde{P}$ zdefiniowana jako $\tilde{P} = U^*PU$ jest też dodatnio określona. Skoro tak, to $f(\tilde{P})$ winno być, z własności (5), liczba nieujemną. Ale $f(\tilde{P}) = Tr(\tilde{P}F) = Tr(U^*PUF)$.

Oznaczając $A = U^*, B = PUF$, i korzystając z tego, że $Tr(AB) = Tr(BA)$, mamy $f(\tilde{P}) = Tr(PUFU^*) = Tr(PD)$.

Teraz P jest diagonalne, D jest diagonalne, iloczyn PD łatwo obliczyć, to macierz $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Biorąc ślad mamy $f(\tilde{P}) = \lambda_1$. $f(\tilde{P})$ jest, z własności (5), jak zauważylismy, liczbą nieujemną. Zatem λ_1 jest liczba nieujemną. Podobnie możemy pokazać, że λ_2 jest liczba nieujemną, wprowadzając macierz $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i rozumujac analogicznie. Twierdzenie zostało udowodnione.

Zauważmy, że ślad macierzy to suma jej wartości własnych. Zatem λ_1 i λ_2 są liczbami nieujemnymi, ich suma wynosi 1. Aż się prosi by te liczby interpretować jako prawdopodobieństwa dwóch wykluczających się zdarzeń. I tak tez fizycy robią, nie będziemy sie tu jednak w to wgłębiać. Doszliśmy więc do tego, że jesteśmy w stanie zaakceptować następujace, prawie, że udowodnione twierdzenie:

Twierdzenie: *Istnieje wzajemna odpowiedniość pomiędzy stanami f na algebrze a dodatnio określonymi elementami F tej algebry o śladzie równym jeden. Odpowiedniośc ta wyraża się formułą (**??**).*

Wszystko to pięknie i eleganckie, lecz mało intuicyjne. A bez intuicji z rozumieniem krucho. Owszem, intuicja może czasem przeszkadzać, bo może się okazać zbyt prymitywna w stosunku do głębi zagadnienia, ale bez intuicji ciężko. Chcemy zatem cała ta rzecz jaoś *zobaczyć*. Można? Można i trzeba. Najpierw: jak wyobrażać sobie macierze dodatnio określone? Ograniczymy się tutaj, jak to jest w całym naszym wykładzie, do macierzy 2×2. Te zresztą są stosowane nagminnie w wielu działach fizyki, np. w optyce kwantowej.

Zauważmy, że para liczb λ_1, λ_2 to para liczb nieujemnych wtedy i tylko wtedy gdy ich iloczyn i ich suma są liczbami nieujemnymi. Jeśli jedna z naszych liczb jest zerem, a suma jest nieujemna, to i druga liczba musi być nieujemna. Załóżmy więc, że obydwie liczby są różne od zera. Wtedy, aby iloczyn był dodatni, obie muszą być dodatnie lub obie muszą być ujemne. Ale skoro suma jest nieujemna, to nie moga być obydwie ujemne. Zatem obydwie są dodatnie.

Teraz: suma wartości własnych macierzy to jej ślad, a iloczyn wartości własnych to jej wyznacznik. Zatem opisać macierze dodatnio okreslone, to opisać macierze o nieujemnym sladzie inieujemny wyznaczniku. Świetnie. Wiemy, że każdą macierz hermitowską X można zapisać w postaci:

$$X = \begin{bmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Ślad to $(t+z)+(t-z) = 2t$. Wyznacznik to $(t+z)(t-z)-(x-iy)(x+iy) = t^2-x^2-y^2-z^2$. Chcemy więc spełnić dwa równania: $t \geqslant 0$, $t^2-x^2-y^2-z^2 \geqslant 0$. Mamy cztere zmienne, t, x, y, z. Trudno to narysować. Odpuśćmy więc z, połóżmy z równym zeru. Mamy wtedy trzy liczby: t, x, y. Dla t możemy wprowadzić oś pionową, zaś x oraz y rozpinać będą poziomą płaszczyznę, jak to w geometrii bywa. Gdzie są liczby takie, że $t \geqslant 0$? Ano są ponad płaszczyzną x, y. Gdzie są liczby dla których $x^2 + y^2 \leqslant t^2$? Wprowadzając $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ widzimy, że musi byc $r \leqslant t$. Co to za pies? Oto obrazek (uciąłem go na wysokości $t = 1$, bo gdzieś uciąć musiałem:

Otrzymujemy solidny stożek - bąk. To stozek-bąk macierzy dodatnio określonych. Wśród nich są macierze o śladzie równym jedności. By ślad był równy jedności, musi być $t = \frac{1}{2}$. Oznacza to przecięcie naszego stożka z płaszczyzną $t = \frac{1}{2}$ - to koło. Ale zaraz, pominęśmy jeden wymiar, położyliśmy $z = 0$. A co, jesli dopuścimy dowolne z? Patrzac na równanie $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0$, i kładąc w nim $t = 1/2$, otrzymujemy $x^2 + y^2 + y^2 \leqslant 1/4$. To równanie kuli o promieniu $1/2$. Zatem stany algebry są reprezentowane przez macierze, te macierze wypełniają cała solidną kulę. Pomijając jeden wymiar - całe solidne koło - przecięcie bąka z płaszczyzną.