Macierze Pauliego

$$\sigma_0 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \tag{1}$$

$$\sigma_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \ \sigma_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right], \ \sigma_3 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]. \tag{2}$$

Mnożenie macierzy Pauliego:
a) mnożenie przez siebie:

$$\sigma_0\sigma_0 = \sigma_0 = I \tag{3}$$
$$\sigma_1\sigma_1 = \sigma_0 = I \tag{4}$$
$$\sigma_2\sigma_2 = \sigma_0 = I \tag{5}$$
$$\sigma_3\sigma_3 = \sigma_0 = I \tag{6}$$

b) mnożenie z innymi:

$$\sigma_0\sigma_1 = \sigma_1\sigma_0 = \sigma_1 \tag{7}$$
$$\sigma_0\sigma_2 = \sigma_2\sigma_0 = \sigma_2 \tag{8}$$
$$\sigma_0\sigma_3 = \sigma_3\sigma_0 = \sigma_3 \tag{9}$$
$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3 \tag{10}$$
$$\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1 \tag{11}$$
$$\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2 \tag{12}$$

Wszystkie cztery macierze są hermitowskie:

$$\sigma_0 = \sigma_0^*, \ \sigma_1 = \sigma_1^*, \ \sigma_2 = \sigma_2^*, \ \sigma_3 = \sigma_3^*. \tag{13}$$

Wszystkie cztery macierze sa unitarne:

$$\sigma_0\sigma_0^* = \sigma_1\sigma_1^* = \sigma_2\sigma_2^* = \sigma_3\sigma_3^* = I. \tag{14}$$

Macierz σ_0 ma dwie jednakowe wartości własne, obie równe $+1$. Macierze $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, każda, ma jedną wartość własną równą $+1$ i jedna równą -1. Świadczy o tym np. fakt, że ślad każdej z nich (suma wartości własnych) jest zerem, zaś wyznacznik (iloczyn wartości własnych) jest -1. Zanotujmy następujące, banalne zresztą do udowodnienia, "twierdzenie":
Twierdzenie *Każda macierz hermitowska* 2×2, X, *da się jednoznacznie zapisać w postaci*

$$X = t\sigma_0 + x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = \left[\begin{smallmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{smallmatrix}\right], \tag{15}$$

gdzie t, x, y, z są liczbami rzeczywistymi.
Z własności tej wkrótce skorzystamy, gdy zainteresujemy się ponownie macierzami dodatnio określonymi (bo taka będzie wiedźma Δ.)

Związek z kwaternionami.
Możemy wprowadzić trzy macierze:

$$\mathfrak{i} = -i\sigma_1,\ \mathfrak{j} = -i\sigma_2,\ \mathfrak{k} = -i\sigma_3. \tag{16}$$

Wtedy

$$\mathfrak{i}^2 = \mathfrak{j}^2 = \mathfrak{k}^2 = -I, \tag{17}$$

oraz

$$\mathfrak{ij} = -\mathfrak{ji} = \mathfrak{k},\ \mathfrak{jk} = -\mathfrak{kj} = \mathfrak{i}, \mathfrak{ki} = -\mathfrak{ik} = \mathfrak{j}. \tag{18}$$

Tak właśnie Sir William Hamilton zdefiniował algebrę kwaternionów.