Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Liczby zespolone zapisujemy wygodnie jako $x + iy$, gdzie x i y to liczby rzeczywiste. Liczbę zespoloną $z = x + iy$ wygodnie przedstawić jest wtedy na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych, jako punkt o współrzędnych x, y. Liczba sprzężona $\bar{z} = x - iy$ to punkt będący odbiciem punktu z względem osi x. Jeśli $z = x + iy$ oraz $\bar{z} = x - iy$, to mnożąc znajdujemy, że $z\bar{z} = \bar{z}z = x^2 + y^2$. Wtedy $r = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest po prostu odległością punktu z od początku układu współrzędnych. Liczbę r nazywamy zwykle *modułem liczby zespolonej z.*

Przypomnijmy, że $e^{i\phi}$ to liczba zespolona:

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi). \tag{1}$$

Dla tej liczby zespolonej $x = \cos(\phi)$, $y = \sin(\phi)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\sin(x)^2 + \cos(x)^2} = 1$. Liczba ta jest więc przedstawiana jako punkt leżący na okręgu o promieniu $r = 1$, pod kątem ϕ do osi x.

Uwaga: Kąt ϕ musi być tu podany w radianach a nie stopniach. Pełen okrąg obiegamy dla $\phi = 2\pi$ a nie dla $\phi = 360$! Bardzo ważne są własności:

$$e^{i2\pi} = 1, \quad e^{i(\phi+\psi)} = e^{i\phi}e^{i\psi}. \tag{2}$$

Ta ostatnia własność zastępuje nam wzory trygonometryczne na cosinus i sinus sumy i róznicy katów. Przyśpiesza i ułatwia obliczenia niesamowicie.

Rysunek 1: Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Gdy chcemy zapisać liczbę zespoloną o module 1, tzn. leżącą na okręgu jednostkowym, najwygodniej ją zapisać właśnie jako $e^{i\phi}$, podając jej kąt z osią x. Kiedy chcemy zapisać liczbę zespoloną o module r, najwygodniej zapisać ją właśnie jako $re^{i\phi}$. Prejście do zwykłego zapisu $z = x + iy$ jest takie samo jak przejście od biegunowego układu współrzędnych do układu kartezjańskiego. Pisząc $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ mamy $re^{i\phi} = r\cos(\phi) + ir\sin(\phi)$, skąd znajdujemy współrzędne kratezjańskie $z$eta: $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, jak to kiedyś nasz pan na lekcji pisał na tablicy.