Glosariusz terminów zeglarskich przydatnych w zegludze po oceanie algebry macierzy 2×2. Czesc 3, ostatnia

Macierze jako operatory Weźmy macierz A. Ta może operoważ na każdej macierzy X np. mnożąc X przez A z lewej strony. W wyniku wszelka macierz X przechodzi w nową macierz AX. Ten operator oznaczamy przez $L(A)$. Zatem $L(A) : X \mapsto AX$. Lub $L(A)(X) = AX$. $L(A)$ transformuje każdż macierz X w macierz AX. Podobnie $R(A)$ to operator transformujacy każde X w XA. Zarówno $L(A)$ jak i $R(A)$ są operatorami liniowymi, tzn.
1) $L(A)(X + Y) = L(A)(X) + L(A)(Y)$,
2) $L(A)(zX) = zL(A)(X)$.
Na przykład $L(I)$ nie robi nic: $L(I)(X) = IX = X$. Podobnie $R(I)$. Natomiast $L(-I)$ mnoży każdą macierz przez -1. Niezbyt ciekawa operacja. Poznaliśmy też inne operatory, choć nie nazywaliśmy ich operatorami. Na przykład operacja sprzężenia hermitowskiego. Operuje na dowolnej macierzy X transformując ją w macierz X^*. Oznaczmy ten operator literką H. Mamy więc $H(X) = X^*$. Ten operator ma wlasności: 1) (addytywność, t.j. sprzężenie sumy jest sumą sprzężen), ale wlasność 2) jest zastąpiona przez: $H(zX) = (zX)* = \bar{z}X^* = \bar{z}H(X)$ gdzie $\bar{z}$ jest liczbą zespoloną sprzążoną do z. O takim operatorze mówimy, że jest *antyliniowy*.

Mając dowolne dwie macierze A i B, operatory $L(A)$ i $R(B)$ są przemienne. Stosując najpierw $L(A)$ do X otrzymujemy AX. Stosując następnie $R(B)$ do wyniku tej operacji otrzymujemy $(AX)B$. W odwrotnej kolejności, jeśli najpierw zastosujemy $R(B)$ do X, otrzymamy XB. Stosując $L(A)$ do wyniku otrzymujemy $A(XB)$. Ale $(AX)B = A(XB)$ dzięki łączności mnożenia macierzy.

Niech teraz V będzie dowolną macierzą odwracalną. Kombinując operatory $L(V)$ z $R(V^{-1})$ otrzymujemy operator transformujący dowolną macierz X w macierz VXV^{-1} Transformację taką nazywamy transformacją podobieństwa.

Macierze A i B nazywają sią **podobnymi** jeśli istnieje macierz odwracalna V taka, ze $B = VAV^{-1}$. Mówimy wtedy, że macierz V realizuje to podobieństwo. Zauważmy, że $B = VAV^{-1}$ jest równoważne $A = V^{-1}BV$, zatem macierz V^{-1} też realizuje podobieństwo. Gdy dodatkowo macierz V jest macierzą unitarną, mówimy o **podobieństwie unitarnym**.
Niech zatem U będzie macierzą unitarną i oznaczmy przez α operator operujacy na naszej algebrze macierzy i transformujacy każdą macierz X w macierz

do niej podobną przez U :

$$\alpha(X) = UXU^*. \tag{1}$$

Oparator α ma ciekawe i ważne własności:

1. α jest operatorem liniowym: $\alpha(X+Y) = \alpha(X)+\alpha(Y)$, $\alpha(zX) = z\alpha(X)$
2. α przeprowadza iloczyny w iloczyny: $\alpha(XY) = \alpha(X)\alpha(Y)$
3. α jest przemienne ze sprzężeniem hermitowskim: $\alpha(X^*) = \alpha(X)^*$
4. α zachowuje jedność: $\alpha(I) = I$

O operatorze działajacym na algebrze $\mathcal{A}$ i majacym powyższe własności mówimy, że jest **automorfizmem algebry $\mathcal{A}$**. Kiedy chcemy szczególnie podkreslic, że spełniona jest własność 3, mówimy, że jest $*$**–automorfizmem.** Jeśli nasz automorfizm α jest dany formułą (1), mówimy wtedy, że α jest **automorfizmem wewnętrznym**. Jeśli operacja α ma własności 1–4, ale nie da się wyrazić wyrazić wzorem (1), mówimy wtedy, że α jest **automorfizmem zewnętrznym.**
Uwaga 1: *Te pojęcia będą* **kluczowe** *gdy będziemy się zastanawiać nad tym czy początek jest wszędzie czy nigdzie.*
Uwaga 2: *Mały problem jest wtym (a może duzy problem?), że dla algebry macierzy, czy to* 2×2, *czy* 1000×100, *można udowodnić, że nie ma innych automorfizmów niż te wewnętrzne. Wiedzą o tym wszyscy matematycy po dobrym wykładzie z algebry. Wrócimy do tego przy końcu naszej wyprawy.*

Automorfizmy tworzą **grupę**. Oznacza to, że można wykonać, jeden po drugim, dwa automorfizmy i rezultat tych operacji jest znów automorfizmem. Oznacza to także, że dla każdego automorfizmu α istnieje automorfizm odwrotny α^{-1}, taki, że $\alpha(\alpha^{-1}(X)) = \alpha^{-1}(\alpha(X)) = X$. Dla automorfizmów wewnętrznych, postaci

$$\alpha(X) = VXV^*,$$

gdzie V jest operatorem unitarnym, możemy łatwo sprawdzić, że $\alpha^{-1}(X) = V^*XV$. Składanie automorfizmów wewnętrznych odbywa się zaś przez mnożenie odpowiednich macierzy unitarnych. Jeśli α jest postaci:

$$\alpha(X) = VXV^*, \quad \beta(X) = WXW^*,$$

to

$$\alpha(\beta(X)) = VWXW^*V^* = (VW)X(VW)^*.$$

Automorfizm to taka operacja na algebrze, która nie zmienia własnośći jej elementów ani wzajemnych relacji pomiędzy jej elementami. Operatory hermitowkie przechodzą w hermitowskie, unitarne w unitarne. Jedynka w jedynke, sumy w sumy, iloczyny w iloczyny. Ale tutaj zastawiona jest na nas pułapka: poznaliśmy macierze diagonalne. Diagonalność nie jest własnością elementu algebry. Jest własnością macierzy reprezentujacej ten element. W wyniku automorfizmu macierz diagonalna nie przechodzi w macierz diagonalną. Natomiast **widmo macierzy normalnej, t.j. zbiór jej wartości własnych, zachowuje się przy automorfizmach.**