Glosariusz terminów żeglarskich przydatnych w żegludze po oceanie algebry macierzy 2×2.
Część II

Dla każdej macierzy $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ zdefiniowaliśmy jej wyznacznik $Det(A)$ jako liczbę $Det(A) = ad - bc$. Jeśli liczby a, b, c, d są rzeczywiste, to $Det(A)$ jest liczbą rzeczywistą. Jeśli a, b, c, d są zespolone, to $Det(A)$ jest liczbą zespoloną (choć może się zdarzyć, że leży na osi rzeczywistej). Najważniejszą własnością wyznacznika macierzy jest to, że jest *multiplikatywny*:

$$Det(AB) = Det(A)Det(B).$$

Nie będziemy tej włsności wyprowadzać.
Z definicji wyznacznika wynika też natychmiast, że wyznacznik macierzy jednostkowej, $I = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, jest równy jedności $Det(I) = 1$. Wprost z definicji wynika fakt, że dla każdej macierzy A mamy

$$Det(A^*) = \overline{Det(A)}.$$

Wyznacznik macierzy hermitowsko sprzężonej jest liczbą zespolenie sprzężoną do wysnacznika tej macierzy. Stąd, jeśli macierz A jest macierzą hermitowsą, $A = A^*$, to $Det(A)$ jest liczbą rzeczywistą. Można się o tym łatwo przekonać i wprost. Macierz hermitowska, to macierz postaci $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$, gdzie a, d są liczbami rzeczywistymi, zaś $c = \bar{b}$. Wtedy $Det(A) = ad - b\bar{b}$. ad jest liczbą rzeczywistą, oraz $b\bar{b} = ||b||^2$ jest liczbą rzeczuwistą. Stąd $Det(A)$ jest liczbą rzeczywistą.

Wiemy, że dla każdej liczby z, rzeczywistej lub zespolonej, jeśli tylko z jest rózne od zera, istnieje liczba odwrotna, oznaczana przez $1/z$ lub z^{-1}. A jak to jest z macierzami? Przypuśćmy, że dla macierzy A istnieje macierz odwrotna A^{-1}, t.j. taka, że $AA^{-1} = 1$. (*Uwaga: Nie będziemy tego uzasadniać, ale można to pokazać bez większych trudności, że jeśli* $AA^{-1} = I$, *to także* $A^{-1}A = I$.). Biorąc wyznacznik z obu stron tej równości i wykorzystując własność multiplikatywnoći wyznacznika, natychmiast widzimy, że $Det(AA^{-1}) = Det(A)Det(A^{-1}) = 1$. Zatem

- $Det(A) \neq 0$
- $Det(A^{-1}) = 1/Det(A)$.

Prawdziwe jest również stwierdzenie odwrotne: jeśli $Det(A) \neq, 0$ wtedy A ma macierz odwrotną. Można ją wręcz wyliczyć. Dla macierzy 2×2 jest to szczególnie proste: jeśli $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$, oraz jeśli $Det(A) \neq 0$, to

$$A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Kto nie wierzy, niech sprawdzi wymnażając, że w istocie $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Macierz dla której istnieje macierz odwrotna nazywamy **odwracalną**. Wtedy, wprost z definicji wynika, że macierzą odwrotną do A^{-1} jest A: $(A^{-1})^{-1} = A$. Macierz jednostkowa I jest ewidentnie odwracalna: $I^{-1} = I$.

Z multiplikatywności wyznacznika wynika natychmiast, że iloczyn dwóch macierzy odwracalnych A, B, jest macierzą odwracalną. Z łączności mnożenia macierzy wynika natychmiast, że wtedy

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Sprawdzamy, że tak jest: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. **Macierzą odwrotną do iloczynu dwóch macierzy odwracalnych jest iloczyn ich odwrotności, ale wzięty w odwrotnej kolejności.**

Ćwiczenie: Pokazać, że jeśli macierz A jest przemienna z odwracalną macierzą B, to jest także przemienna z B^{-1}.

Rozwiązanie: Załóżmy, że $AB = BA$. Mnożąc obydwie strony równości przez B^{-1} z prawej strony i biorąc pod uwagę fakt, że $BB^{-1} = I$, otrzymujemy $A = BAB^{-1}$. Mnożąc obydwie strony tej ostatniej równości przez B^{-1} z lewj strony i biorąc pod uwagę fakt, że $B^{-1}B = I$, otrzymujemy $B^{-1}A = AB^{-1}$. A jest przemienne z B^{-1}.

Ostrzeżenie: Dla liczb, czy to rzeczywistych czy to zespolonych, mamy wygodny zapis: miast pisać ab^{-1} piszemy a/b lub $\frac{a}{b}$. Z macierzami nie jest tak prosto. Nawet kiedy macierz B jest odwracalna, nie możemy po prostu napisacć $\frac{A}{B}$, bo nie wiemy czy ma to znaczyć $B^{-1}A$ czy też AB^{-1}. Pisać $\frac{A}{B}$ wolno nam tylko wtedy, gdy jest jasne, że A i B są przemienne: $AB = BA$.

Bardzo ważną, a dla nas wręcz niesłychanie ważną, grupę macierzy odwracalnych stanowią macierze **unitarne**. Macierz unitarna, to taka macierz odwracalna U, dla której macierz odwrotna jest identyczna z macierzą hermitowsko sprzężoną: $U^{-1} = U^*$. Wychodzi to na to samo, co napisanie

$$UU^* = U^*U = I.$$

Z faktu, że $A^{**} = A$ dla każdej macierzy A wynika natychmiast, że jeśli U jest unitarna, to U^* jest też unitarna. Stąd macierz odwrotna do macierzy unitarnej jest unitarna. Grupę macierzy unitarnych 2×2 oznaczamy zwykle przez $U(2)$. Najprostszym przykładem macierzy z grupy $U(2)$ jest macierz jednostkowa I. Istotnie, $I^* = 1$, stąd $I^*I = I\,I = I$. Podobnie łatwo otrzymujemy, że macierz $-I$ (*minus* I) jest unitarna (sprawdź z definicji, jak nie dasz rady, nie wstydź się wołać o pomoc - na pewno nadejdzie). Jeżeli macierze U i V są unitarne, to ich iloczyn UV jest macierzą unitarną. Aby się o tym przekonać wystarczy skorzystać z definicji oraz z łączności mnożenia. By nie–metematykom zademonstrować choć raz jak przebiega dowód matematyczny, oto formalny dowód: Założenie: $UU^* = I$, $VV^* = I$. Teza: $(UV)(UV)^* = I$. Dowód: $(UV)(UV)^* = (UV)(V^*U^*) = U(VV^*)U^* = UIU^* = UU^* = I$. Koniec dowodu.

Nasza grupa $U(2)$ jest *grupą* zgodnie z terminologią matematyczną.

Mając daną macierz A, nie będzie ona na ogól przemienna ze swoją hermitowsko sprzężoną macierzą A^*. Te szczególne macierze dla których $AA^* = A^*A$ nazywamy macierzami **normalnymi**. Każda macierz hermitowska, tzn. taka dla której $A = A^*$, jest ewidentnie macierzą normalną (bo każda macierz jest przemienna z sobą samą: $AA = AA$). Macierz unitarna U jest ewidentnie macierzą normalną (bowiem $UU^* = U^*U = I$). Są jednak także inne macierze normalne: są to macierze **diagonalne**, t.j. macierze postaci $D = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right]$, gdzie a, d są liczbami zespolonymi. Dla macierzy diagonalnej D mamy $D^* = \left[\begin{smallmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{d} \end{smallmatrix}\right]$, zaś mnożenie przez siebie macierzy diagonalnych sprowadza się do mnożenia przez siebie odpowiednich liczb zespolonych na diagonali. A mnożenie liczb jest przemienne.

Poznaliśmy już sporo terminów. Trochę to może przytłaczające dla początkującego żeglarza, ale przecież nietrudne. Starliśmy się wszystko wyprowadzać i definiować. Przyszedł jednak czas, gdy musimy skorzystać z gotowego narzędzia, pewnej ważnej własności macierzy, której wyprowadzenia w pięciu czy nawet dziesięciu linijkach się nie mogę podjąć. Jest mianowicie takie twierdzenie matematyczne, bardzo ważne, proste do wysłowienia, ale udowodnienie którego wymagałoby, przy naszej dotychczasowej wiedzy, paru dobrych stron i oderwałoby nas od głównego wątku.

Twierdzenie:

1. *Dla każdej macierzy normalnej A istnieje macierz unitarna U taka, że $D = UAU^*$ jest macierzą diagonalną: $D = \left[\begin{smallmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{smallmatrix}\right]$.*

2. *Zbiór liczb (na ogół zespolonych)* $\{z_1, z_2\}$ *nie zależy od wyboru diagonalizującej macierzy* U *i zależy jedynie od samej macierzy* A*. Liczby te nazywają się* **wartościami własnymi macierzy** A*, a sam zbiór* $\{z_1, z_2\}$ *to* **widmo** *(lub* **spektrum***) macierzy* A*.*

3. *Liczba zespolona* z *jest wartością wlasną macierzy* A *wtedy i tylko wtedy, gdy* $Det(A - zI) = 0$*.*

Przykład: Znajdźmy widmo, tzn. zbiór wartości własnych macierz $j = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Aby to zrobić skorzystamy z punktu (3) Twierdzenia. Budujemy więc macierz $j - zI$:

$$j - zI = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] - z\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} -z & 1 \\ 1 & -z \end{smallmatrix}\right].$$

Bierzemy wyznacznik: $Det(j - zI) = (-z)(-z) - 1 = z^2 - 1$ i przyrównujemy go do zera: $z^2 - 1 = 0$. Otrzymujemy równanie kwadratowe, które możemy łatwo rozwiązać. Ma dwa rozwiązania: $z = +1$ i $z = -1$. Wartościami własnymi macierzy j są zatem liczby $+1, -1$. Widmo macierzy j to para liczb $(-1, +1)$. Nie mamy technicznej wiedzy, by samemu *znaleźć* macierz U diagonalizującą j Możemy jednak *sprawdzić*, że następująca macierz $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$: a) jest macierzą unitarną, oraz b) diagonalizuje j do postaci .... I to jest właśnie zadanie domowe.