Glosariusz terminów żeglarskich przydatnych w żegludze po oceanie algebry macierzy 2×2. Część I

Rozważamy zbiór wszystkich macierzy 2×2, których elementami są liczby zespolone. Dobrze będzie nadać temu zbiorowi nazwę. Wybierzemy symbol $\mathcal{A}$, bo nasze macierze tworzą *algebrę*. Przypomnijmy podstawowe działania i operacje:
Macierz zerową: $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ będziemy zwykle oznaczać po prostu symbolem 0. Czy chodzi o macierz zerową czy o liczbę zero, trzeba będzie domyślić się z kontekstu. Podobnie z macierzą jednostkową $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ będziemy czasem oznaczać po prostu symbolem 1, czasem zaś symbolem I (od *identyczność*). Macierze możemy dodawać do siebie:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix},\ A{+}B = B{+}A = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}.$$

$$A + 0 = 0 + A = A.$$

Możemy macierze mnożyć przez liczby (zespolone):

$$zA = Az = \begin{bmatrix} za & zb \\ zc & zd \end{bmatrix}, \quad IA = AI = A.$$

Możemy macierze mnożyć przez siebie:

$$AB = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}.$$

Mnożenie jest łączne:

$$A(BC) = (AB)C,$$

choć **na ogół** nie jest przemienne: $AB \neq BA$.

Na każdej macierzy $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ możemy wykonać trzy ważne operacje:

1. operację sprzężenia zespolonego:
$$A \mapsto \bar{A} = \left[\begin{smallmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{smallmatrix}\right]$$
gdzie $\overline{x + iy} = x - iy$
2. operację transponowania:
$$A \mapsto A^T = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$$
3. operację sprzężenia hermitowskiego, która jest złożeniem operacji sprzężenia zespolonego i transponowania:
$$A \mapsto A^* = \overline{A^T} = \bar{A}^T = \left[\begin{smallmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{smallmatrix}\right]$$

Pierwsza z tych operacji nie zmienia położenia elementów macierzy, dwie pozostałe zamieniają kolumny na wiersze a wiersze na kolumny. Łatwo stąd wyprowadzić następujące ważne własności:

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B},\ (AB)^T = B^T A^T,\ (AB)^* = B^* A^*.$$

Mamy też:

$$\overline{zA} = \bar{z}\bar{A},\ (zA)^T = zA^T,\ (zA)^* = \bar{z}A^*$$

dla każdej liczby zespolonej z, oraz

$$\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B},\ (A+B)^T = A^T + B^T,\ (A+B)^* = A^* + B^*.$$

Każda z tych operacji po dwukrotnym zastosowaniu prowadzi do operacji identyczności, podobnie jak to ma miejsce przy mnożeniu liczby przez -1, $(-1) \times (-1) = 1$:

$$\bar{\bar{A}} = A,\ (A^T)^T = A,\ (A^*)^* = A.$$

Dla liczby zespolonej $z = x + iy$ mamy $\bar{z} = x - iy$. Stąd wynika, że $z = \bar{z}$ wtedy i tylko wtedy gdy $y = 0$, tzn. gdy z leży na osi rzeczywistej. Mówimy: gdy z jest rzeczywiste. Podobnie $\bar{z} = -z$ wtedy i tylko wtedy gdy $x = 0$, tzn. gdy z leży na osi urojonej. Mówimy: gdy z jest urojone. Macierze A dla których $\bar{A} = A$, mają czysto rzeczywiste elementy, nazywamy je macierzami rzeczywistymi. Jeśli $\bar{A} = -A$, macierz A ma elementy urojone. Nazywamy ją macierzą urojoną. Macierze A dla których $A^T = A$ nazywamy **symetrycznymi**, te dla których $A^T = -A$ nazywamy **antysymetrycznymi**. Macierze dla których $A^* = A$ nazywamy **hermitowskimi**. Te dla których $A^* = -A$ nazywamy **antyhermitowskimi**. Jeśli A jest macierzą hermitowską, to iA jest macierzą antyhermitowską. Jeśli A jest antyhermitowska, to iA jest hermitowska. Wprost z definicji wynika wiele prostych własności, jak np. suma macierzy hermitowskich jest macierzą hermitowską, każdą macierz A można jednoznacznie przedstawić jako sumę macierzy hermitowskiej i antyhermitowskiej, itd. itp. Macierze hermitowskie, jak to łatwo wynika z samej definicji, mają szczególną postać. Są mianowicie postaci:

$$\begin{bmatrix} \lambda & x + iy \\ x - iy & \nu \end{bmatrix},$$

gdzie λ, μ, x, y są liczbami rzeczywistymi. Na przekątnej mamy więc liczby rzeczywiste, na "antyprzekątnej", tej z lewo-dół do prawo-góra, mamy liczby zespolone sprzężone względem siebie.

Dygresja 1: Z jakiegoś, do dziś nie do końca zrozumiałego powodu, dla scharakteryzowania macierzy hermitowskiej 2×2 potrzebne są cztery liczby rzeczywiste, dokładnie tyle, ile potrzeba do scharakteryzowania zdarzenia zachodzącego w czasie i w przestrzeni. Jeśli x, y, z, t są współrzędnymi takiego zdarzenia, fizycy wiążą z tym zdarzeniem macierz hermitowską:

$$\begin{bmatrix} ct+z & x+iy \\ x-iy & ct-z \end{bmatrix},$$

gdzie c jest prędkością światła w próżni. W ten sposób cała czasoprzestrzeń szczególnej teorii względności Einsteina jest odwzorowywana na zbiór wszystkich macierzy hermitowskich 2×2. Wrócimy do tej uwagi za chwilę. Z każdą macierzą $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ możemy związać dwie ważne liczby: **ślad**, oznaczany przez $Tr(A)$, (czasem $tr(A)$) oraz **wyznacznik**, oznaczany przez $Det(A)$ (czasem $det(A)$):

$$Tr(A) = a + d, \quad Det(A) = ad - bc.$$

Zarówno ślad jak i wyznacznik są na ogół liczbami zespolonymi. Jednak dla macierzy hermitowskich ich część urojona znika.

Dygresja 2: Dla macierzy A przedstawiającej zdarzenie czaso–przestrzenne, jak w uwadze wyżej, mamy $Det(A) = (ct - z)(ct + z) - (x + iy)(x - iy)$, skąd:

$$Det(A) = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2).$$

Jest to znany ze szczególnej teorii względności *niezmiennik*, tzw. *interwał czasoprzestrzenny*. Warunek $Det(A) = 0$ ma wtedy prostą interpretację fizyczną: zdarzenie o współrzędnych x, y, z, t można połączyć sygnałem świetlnym z “początkiem układu współrzędnych”.