**Algebra Clifforda $Cl(3,0)$ - algebra geometryczna**

Baza algebry:
1 - skalar,
$e_1, e_2, e_3$ wektory,
$e_{23} = e_2e_3, e_{31} = e_3e_1, e_{12} = e_1e_2$ - dwuwektory,
$I = e_{123} = e_1e_2e_3$ - pseudoskalar.

$$1^2 = e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1.$$

Dla $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, mamy $e_ie_j = -e_je_i$ - różne wektory bazowe antykomutują.

$$e_{12}^2 = e_{23}^2 = e_{31}^2 = I^2 = -1.$$

Ogólny element algebry (wielowektor) to
$a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_{23} + a_5e_{31} + a_6e_{12} + a_7e_{123}$.
Norma w algebrze:
$$|a| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2}.$$
Ogólny skalar to: $a = \lambda$, - liczba rzeczywista.
Ogólny wektor $\mathbf{a}$ to
$\mathbf{a} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, gdzie $a_1, a_2, a_3$ to liczby rzeczywiste - składowe $a_x, a_y, a_z$ wektora $\mathbf{a}$.
Ogólny dwuwektor to: $a = a_4e_{23} + a_5e_{31} + a_6e_{12}$.
Ogólny pseudoskalar to: $a = \lambda I$ - gdzie $\lambda$ jest liczbą rzeczywistą.
W algebrze wyróżnione są cztery podprzestrzenie:
skalarów (jednowymiarowa),
wektorów (trójwymiarowa),
dwuwektorów (trójwymiarowa),
pseudoskalarów (jednowymiarowa),
skalar + dwuwektor - element parzysty algebry,
wektor + trójwektor - elemet nieparzysty algebry.
Iloczyn dwóch elementów parzystych jest elementem parzystym,
ilczyn dwóch elementów nieparzystych jest elementem parzystym,
iloczyn nieparzystego i parzystego jest elementem nieparzystym,
elementy parzyste tworzą podalgebrę $Cl_+(3,0)$ izomorficzną
z algebrą kwaternionów.
Skalary wraz z pseudoskalarami, postaci $\alpha + \beta I$, $\alpha, \beta$ - rzeczywiste, tworzą podalgebrę isomorficzną z ciałem liczb zespolonych.
Są przemienne z każdym elementem algebry.

**Dualność - operator $\star$ Hodge'a**

Dla dowolnego $a$ definiujemy $\star a = aI = Ia$. mamy $\star\star a = \star^2 a = -a$. $\star 1 = i$, $\star i = -1$, $\star e_1 = e_{23}$, $\star e_2 = e_{31}$, $\star e_3 = e_{12}$. Dowolny wielowektor $w$ może byc zapisany jako:

$$w = \alpha + \mathbf{a} + I\mathbf{b} + I\beta, \tag{1}$$

gdzie $\alpha, \beta$ - liczby rzeczywiste, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ - wektory.
Dla dwóch wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ przez $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ oznaczamy iloczyn skalarny:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \tag{2}$$

gdzie $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ jest cosinusem kąta pomiędzy wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Przez $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ oznaczamy iloczyn wektorowy:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3. \tag{3}$$

Mamy

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{4}$$

Dla dowolnych dwóch wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ mamy:

$$\mathbf{ab} + \mathbf{ba} = 2\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \tag{5}$$

$$\mathbf{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) + \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \tag{6}$$

gdzie

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}). \tag{7}$$

Dla dowolnego wektora $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^2$ jest skalarem (liczbą rzeczywistą): $\mathbf{a}^2 = |a|^2$, zatem jest przemienne z dowolnym elementem algebry.
Iloczyn dwóch wektorów jest sumą części skalarnej $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ i dwuwektora $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ - iloczynu zewnętrznego wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Mamy:

$$\star(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}. \tag{8}$$

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{9}$$

Widać stąd, że wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są równoległe do siebie, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, wtedy i tylko wtedy gdy $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$. Są do siebie prostopadłe, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.
Iloczyn zewnętrzny $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ jest anty-przemienny z każdym z wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Można to sprawdzić rachunkiem. Na przykład:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= \frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}^2\mathbf{b} - \mathbf{aba}) = \frac{1}{2}(\mathbf{ba}^2 - \mathbf{aba}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{ba} - \mathbf{ab})\mathbf{a} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{a}.
\end{aligned}$$

**Twierdzenie**: *W algebrze $Cl(3,0)$ każdy dwuwektor da się zapisać w postaci* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

Dwuwektor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ przedtstawiamy jako zorientowany (strzałka od $\mathbf{a}$ do $\mathbf{b}$) element powierzchni rozpięty na wektorach $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Zmiana znaku dwuwektora to zmiana orientacji (na przeciwną) elementu powierzchni. Dwuwektor nie ma przypisanego kształtu. Ponieważ każdy dwuwektor możemy przedtstawić w postaci $I\mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{b}$ jest wektorem, dlatego w fizyce często dwuwektory myli się z wektorami. Dla rozróżnienia używa się czasem dodatku "wektor osiowy" dla oznaczenia wektora reprezen– tującego dwuwektor. Wektor $\mathbf{b}$ reprezentujacy dwuwektor $I\mathbf{b}$ jest prosto– padły do elementu powierzchni reprezentującego $I\mathbf{b}$. Wektorem reprezen– tującym iloczyn zewnętrzny $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ jest iloczyn wektorowy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

## Główny antyautomorfizm i automorfizm

**Główny antyautomorfizm** (ang. *main antiautomorphism*) algbery Clif– forda to odwrócenie porządku mnożnia. Będziemy go oznaczać gwiazdką $*$. Ma własność $(ab)^* = b^*a^*$. Mamy $1^* = 1$, $e_1^* = e_1, e_2^* = e_2, e_3^* = e_3, e_{12}^* = -e_{12}, e_{23}^* = -e_{23}, e_{31}^* = e_{31}, e_{123}^* = -e_{123}$. Nie zmienia skalarów i wektorów, zmienia znak dwuwektorów i trójwektorów. Dla dowolnego wielowektora $a$ mamy $|a^*| = |a|$.

**Główny automorfizm** (ang. *main automorphism*) to zmiana znaku elementów nieparzystych. Będziemy pisać $a'$. Ma własność $(ab)' = a'b'$. Wykonując (w dowolnej kolejności) automorfizm i antyautomorfizm otrzy– mujemy w wyniku inny antyautomorfizm - *sprzężenie w algebrze Clifforda oznaczane przez* $\tilde{a}$ :

$$\tilde{a} = a'^* = a^{*\prime}. \tag{10}$$

**Sprzężenie** $a \mapsto \tilde{a}$ (ang. *conjugation*) zmienia znak wektorów i dwu– wektorów. Nie zmienia znaku skalarów i pseudoskalarów. Mamy:

$$\widetilde{ab} = \tilde{b}\tilde{a}. \tag{11}$$

## Odbicia i obroty

Niech $\mathbf{n}$ będzie wektorem jednostkowym: $\mathbf{n}^2 = |\mathbf{n}|^2 = 1$. Dla dowolnego wektora $\mathbf{a}$ możemy napisać tożsamość:

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}^2\mathbf{a} = \mathbf{nna} = \mathbf{n}(\mathbf{na}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{a}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{a}). \tag{12}$$

Pierwszy człon, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ to nic innego niż rzut wektora $\mathbf{a}$ na kierunek wektora $\mathbf{n}$. Stąd człon drugi to rzut prostopadły wektora $\mathbf{a}$ na płaszczyznę prostopadłą do wektora $\mathbf{n}$. Mamy więc rozkład:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\|} + \mathbf{a}_{\perp}, \tag{13}$$

gdzie

$$\mathbf{a}_{\|} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n}, \quad \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \wedge \mathbf{a}). \tag{14}$$

Dla dowolnego jednostkowego $\mathbf{n}$ i wektora $\mathbf{a}$ obliczmy $\mathbf{nan}$. W tym celu rozłóżmy $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\|} + \mathbf{a}_{\perp}$. Część równoległa jest proporcjonalna do $\mathbf{n}$, zatem jest z $\mathbf{n}$ przemienna: $\mathbf{n}\mathbf{a}_{\|}\mathbf{n} = \mathbf{n}^2\mathbf{a}_{\|} = \mathbf{a}_{\|}$. Część prostopadła jest iloczynem $\mathbf{n}$ i $\mathbf{n} \wedge \mathbf{a}$. Wektor $\mathbf{n}$ jest przemienny z sobą samym i anty-przemienny z $\mathbf{n} \wedge \mathbf{a}$. Jest zatem anty-przemienny z $\mathbf{a}_{\perp}$. Stąd $\mathbf{nan} = \mathbf{a}_{\|} - \mathbf{a}_{\perp}$. Zauważmy, że $\tilde{\mathbf{n}} = -\mathbf{n}$. Stąd mamy

$$\mathbf{na}\tilde{\mathbf{n}} = (-\mathbf{a}_{\|} + \mathbf{a}_{\perp}) \tag{15}$$

zmiana znaku rzutu na kierunek wektora $\mathbf{n}$ i pozostawienie niezmienionego rzutu na płaszczyznę prostopadłą do $\mathbf{n}$ to nic innego jak odbicie wektora $\mathbf{a}$ względem tej płaszczyzny.

**Wniosek:** *Dla dowolnego wektora jednostkowego* $\mathbf{n}$ *i dowolnego wektora* $\mathbf{a}$ *odbicie wektora* $\mathbf{a}$ *względem płaszczyzny prostopadłej do* $\mathbf{n}$ *dane jest wzorem* $\mathbf{na}\tilde{\mathbf{n}}$.

**Fakt:** (podany tu bez dowodu) *Każdy obrót w trójwymiarowej przestrzeni jest obrotem względem pewnej osi o pewien kąt.*

Zatem każdy obrót jest w samej rzeczy obrotem w pewnej płaszczyźnie - tej prostopadłej do osi obrotu. Jeśli $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są dwoma jednostkowymi nierównoległymi wektorami, to wektor $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ jest prostopadły do płaszczyzny rozpinanej przez $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Obrót wokół osi wyznaczonej przez $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ jest zatem obrotem w płazczyźnie rozpinanej przez te wektory. Odbijając wektor $\mathbf{x}$ najpierw względem płasczyzny prostopadłej do $\mathbf{a}$, potem względem płaszczyzny prostopadłej do $\mathbf{b}$, w rezultacie obracamy wektor $\mathbf{x}$ o kąt $2\psi$, gdzie $\psi$ jest kątem pomiędzy $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.